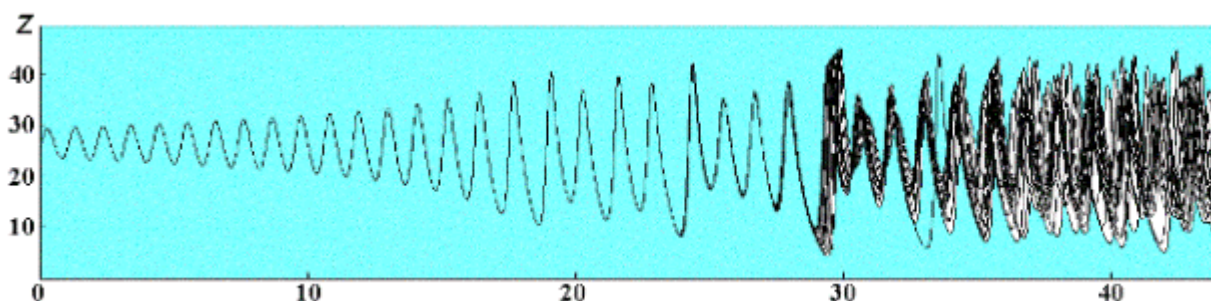


Аттрактор Лоренца. Хаос или упорядочение хаоса?

Определение :

Аттрактор — компактное подмножество фазового пространства динамической системы, все траектории из некоторой окрестности которого стремятся к нему при времени, стремящемся к бесконечности.

Благодаря посещению различных областей в трехмерном пространстве фазовая траектория может запутаться, что приводит к возникновению хаотических режимов. Основной атрибут хаоса – наличие очень сильной зависимости режима от начальных условий. В результате даже очень малое различие в начальных состояниях системы со временем приведет к существенно разному поведению (эффект бабочки). Название обязано фантастическому рассказу, в котором гибель бабочки при путешествии во времени приводит к глобальным историческим переменам.)



В 1960 г. Лоренц создал мини-модель погоды. Каждую минуту компьютер выдавал ряды чисел. Они сообщали, что господствующее сейчас западное направление ветра скоро сменится на северное, потом на южное и вновь на северное. Лоренц пытался угадать, какой будет искусственная погода в каждый следующий момент.

Анализируя изменчивость атмосферных явлений, Лоренц постигал природу происходящего в скоплениях воздушных вихрей и циклонов, которые, неизменно подчиняясь математическим законам, в точности не воспроизводились ни разу. Казалось, что облакам присуща особая структура. Раньше Лоренц опасался, что научное исследование погоды сродни попыткам разобрать шкатулку с секретом при помощи отвертки. Теперь он гадал, способно ли вообще рациональное знание проникнуть в это таинство. Погода обладала свойствами, какие нельзя объяснить с помощью средних величин. Средняя температура июня в Кембридже и Массачусетсе держится на уровне 75 градусов по Фаренгейту... Дождливая погода в Эр-Рияде (Саудовская Аравия) в среднем выпадает на 10 дней в году — вот о чем говорила статистика. Суть же состоит в том, как сменяются модели атмосферных процессов с течением времени. Именно ее и сумел ухватить Лоренц.

Лоренц был волен устанавливать законы природы по своему усмотрению. После ряда проб и ошибок он выбрал двенадцать уравнений, описывающих связь между температурой и атмосферным давлением, а также между давлением и скоростью ветра.

Постигни закон погоды — и ты поймешь Вселенную! В этом заключалась философия компьютерного моделирования погоды.

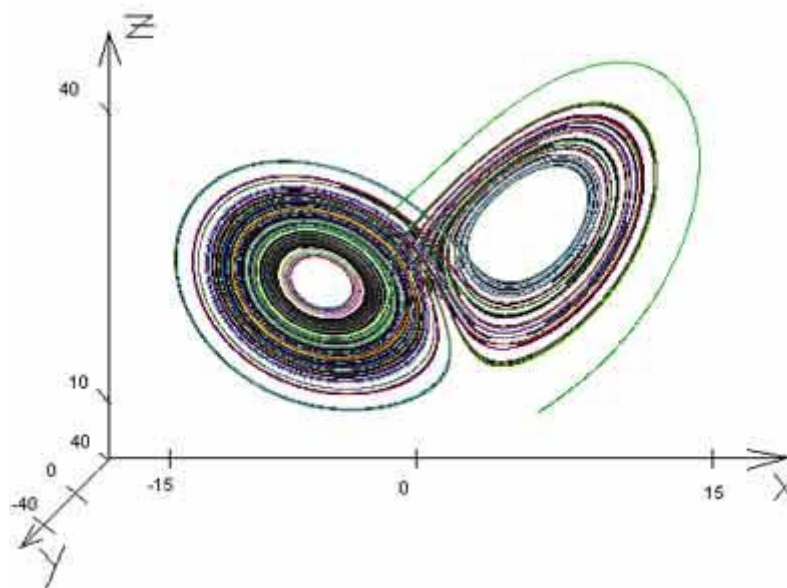
Знаменитый пример, наглядно демонстрирующий, что стоит за термином хаотическая динамика. Эдвард Лоренц написал программу для решения следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}dx/dt &= s(-x + y), \\ dy/dt &= rx - y - xz, \\ dz/dt &= -bz + xy.\end{aligned}$$

В дальнейших расчетах параметры s , r и b постоянны и принимают значения $s = -10$, $r = 28$ и $b = 8/3$.

Согласно описанию эксперимента, принадлежащему Лоренцу, он вычислял значения решения в течение длительного времени, а затем остановил счет. Его заинтересовала некоторая особенность решения, которая возникала где-то в середине интервала счета, и поэтому он повторил вычисления с этого момента. Результаты повторного счета, очевидно, совпали бы с результатами первоначального счета, если бы начальные значения для повторного счета в точности были равны полученным ранее значениям для этого момента времени. Лоренц слегка изменил эти значения, уменьшив число верных десятичных знаков. Ошибки, введенные таким образом, были крайне невелики. Но самое неожиданное было впереди. Вновь сосчитанное решение некоторое время хорошо согласовывалось со старым. Однако, **по мере счета расхождение возрастало**, и постепенно стало ясно, что новое решение вовсе не напоминает старое.

Лоренц вновь повторил вычисления. То, что он наблюдал, теперь называется существенной зависимостью от начальных условий --- основной чертой, присущей хаотической динамике. Существенную зависимость иногда называют эффектом бабочки. Такое название относится к невозможности делать долгосрочные прогнозы погоды. Сам Лоренц разъяснил это понятие в статье “Предсказуемость: может ли взмах крылышек бабочки в Бразилии привести к образованию торнадо в Техасе?”, опубликованной в 1979 году.



Лоренц предвидел, что должна существовать связь между неповторяемостью атмосферных явлений и неспособностью метеорологов предсказать их. Иными словами, - это связь между аperiodичностью и непредсказуемостью. Найти простые выражения для аperiodичности было делом нелегким, однако Лоренц, преодолев множество препятствий, достиг успеха. Это произошло, когда он ввел в машину уравнение, описывающее количество солнечной энергии, которая изливается на земную поверхность при движении светила с востока на запад.

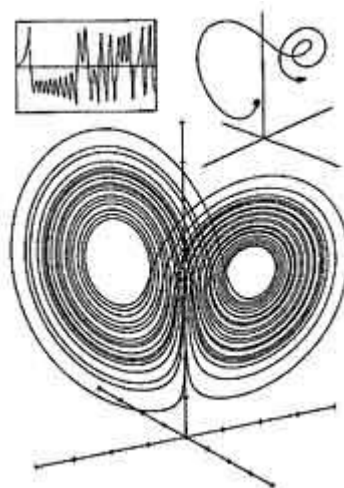
После этого данные на выходе пришли в соответствие с изменениями, наблюдаемыми в реальности, когда солнце нагревает, например, восточное побережье Северной Америки и Атлантический океан. В результате цикличность программы исчезла.

Эффект бабочки был не случайностью, но необходимостью. Допустим, небольшие пертурбации так и останутся небольшими, не перемещаясь в системе. Приближаясь к ранее пройденному состоянию, погода уподобится и последующим состояниям. Циклы станут предсказуемыми. Чтобы воспроизвести весь богатый спектр реальной погоды земного шара, её чудесное многообразие, вряд ли можно желать чего-либо лучшего, чем эффект бабочки.

Но дело касается не только погоды. Например, в динамике жидкостей всё сводится к нелинейному дифференциальному уравнению Навье—Стокса, удивительно ёмкому и определяющему связь между скоростью, давлением, плотностью и вязкостью жидкости.

Природу этих связей зачастую невозможно уловить, ибо исследовать поведение нелинейного уравнения все равно что блуждать по лабиринту, стены которого перестраиваются с каждым шагом. Как сказал фон Нейман, характер уравнения... меняется одновременно во всех релевантных отношениях, меняется как порядок, так и степень. Отсюда могут проистекать большие математические сложности.

Другими словами, мир был бы совсем иным и хаос не казался бы хаосом, если бы в уравнении Навье—Стокса не таился демон нелинейности.



Долгие годы о работе Лоренца говорили так, словно она представляла собой древний манускрипт, хранивший секреты вечности. Из тысяч статей, составивших специальную литературу о проблеме хаоса, вряд ли какая-либо цитировалась чаще, чем Лоренцов “Детерминистский неперiodический поток”. В течение многих лет ни один феномен не изображался столь бесcчетное количество раз, ни об одном не сняли столько фильмов, сколько о таинственной кривой, описанной в этой главе, — двойной спирали, известной как аттрактор Лоренца. Она воплощала в себе сложность и запутанность, все многообразие хаоса.



Но похоже, мы упустили самую суть явления, — заявлял Малкус. В те времена лишь немногие осознавали, что отдельные области знания изолируются друг от друга. Биологам было что читать и без книг по математике; более того, молекулярные биологи не отвлекались на чтение статей по биологии популяций.

Это магическое изображение, напоминающее маску совы или крылья бабочки, стало эмблемой первых исследователей хаоса. Оно раскрывает тонкую структуру, таящуюся в беспорядочном потоке

информации. Изменение значений любой переменной может быть показано графически в зависимости от времени.

Чтобы продемонстрировать меняющееся соотношение между тремя переменными, достаточно предположить, что в каждый момент времени три переменных фиксируют нахождение точки в трехмерном пространстве; по мере изменения системы перемещение точки описывает непрерывную линию. Поскольку состояние системы никогда точно не повторяется, траектория не пересекает сама себя, образуя лишь новые и новые петли. Движение в аттракторе абстрактно, тем не менее оно передает особенности движения реальных систем.

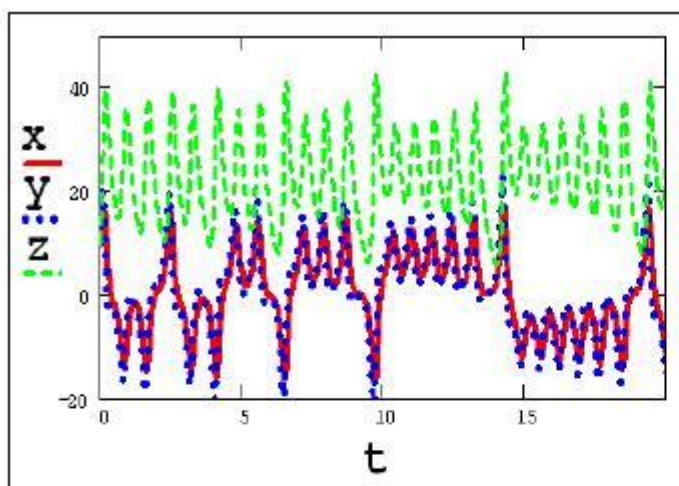


Рис. 43. Странный аттрактор – решение (70) с параметрами (10, 27, 8/3)

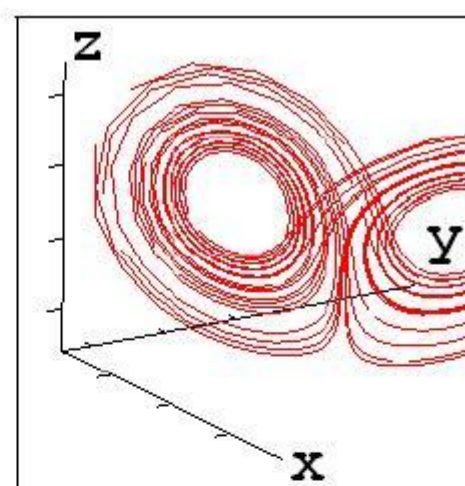
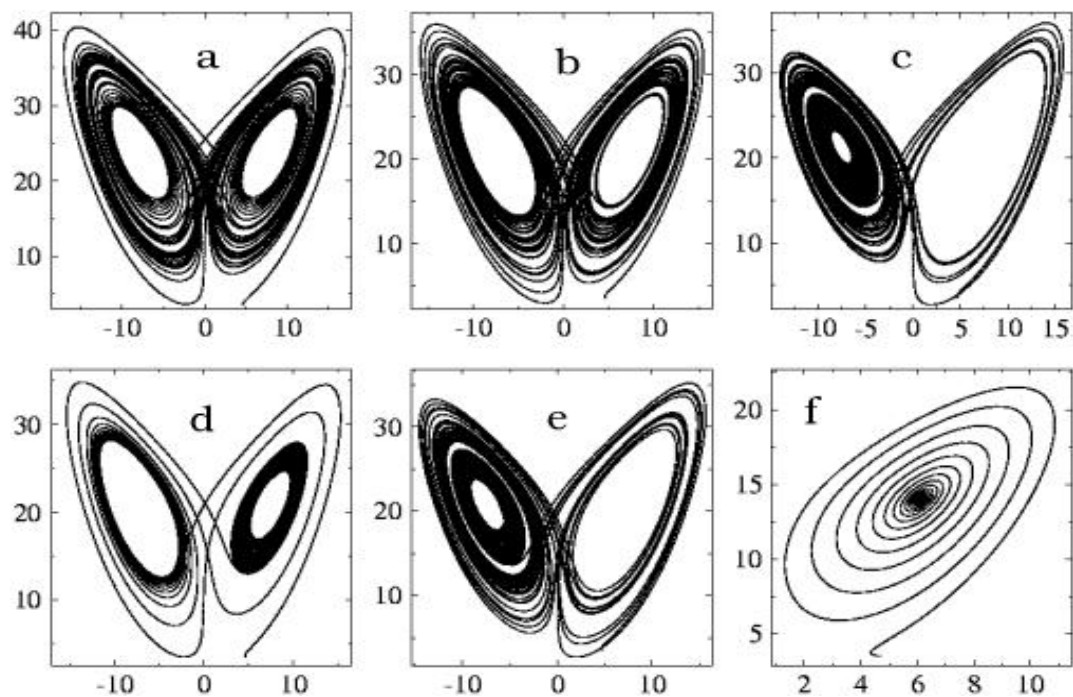
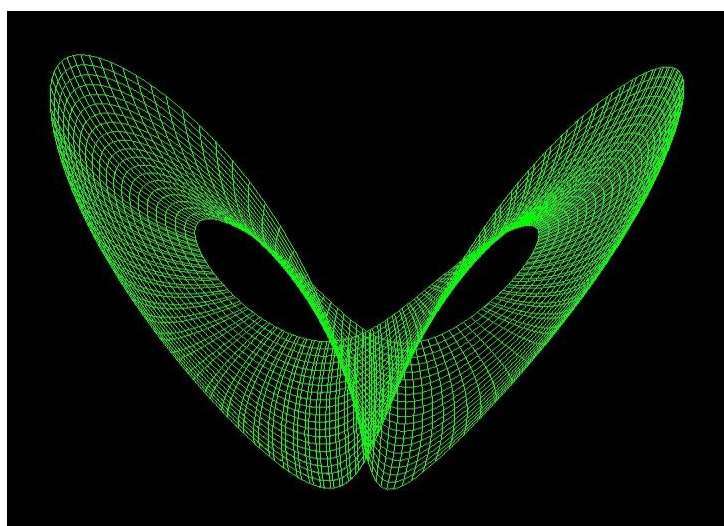


Рис. 44. Странный аттрактор в фазовом пространстве

Асимптотического поведения системы Лоренца при $t \rightarrow \infty$. Независимо от выбора начальных условий, уравнения имеют решение, топология которого показана на рис. 44. Такое решение является замечательной моделью турбулентности конвекции. Скорость течения жидкости в трубке с б градиентом температуры хаотически осциллирует от момента времени к другому. Таким образом, модель хорошо описывает, как турбулентное движение при конвекции жидкости в трубке, так и сам ламинарно-турбулентный переход, происходящий при некотором критическом градиенте температур.



Типовое диф. моделирование аттракторов Лоренца



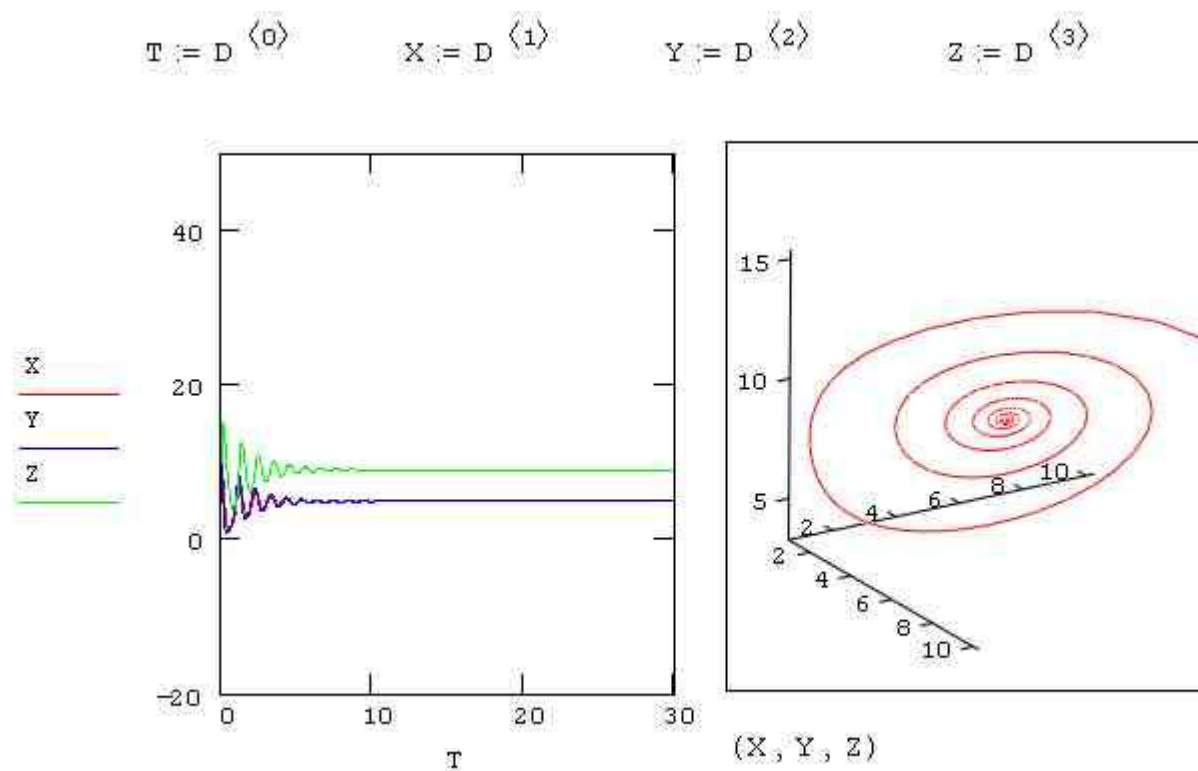
Мат. модель странного аттрактора Лоренца в волновых уравнениях.



Экспериментальное упорядочение электромагнитного хаоса.

Вместо ожидаемого эффекта электромагнитного хаоса на экране осциллографа появилось запутанное изображение, расположенное в определенных границах, но никогда не повторявшееся. Изгибы линий приобрели характерные очертания, что-то похожее на два крыла бабочки в трехмерном пространстве. И эта форма одновременно свидетельствовала о полной неупорядоченности, поскольку ни одна из точек или их комбинаций не повторялась

Только некоторые математики оценили открытие Лоренца, и еще целых десять лет физики, астрономы и биологи открывали уже открытое. В конце концов, Лоренц был метеорологом, и никому не приходило в голову искать первое описание феномена хаоса на страницах Метеорологического журнала...



Решение системы Лоренца с измененным параметром $\sigma=10$

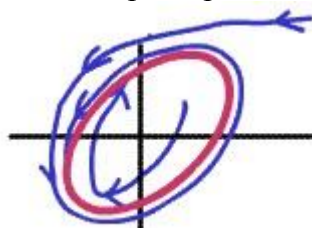
Решение подобных нелинейных динамических систем можно получить только численно, поэтому их изучение стало бурно развиваться с ростом возможностей вычислительной техники

Для нахождения неподвижных точек систем ОДУ требуется (приравняв производные по времени в правых частях нулю) решить получившуюся систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, \vec{p}) \\ \dot{y} = f_2(x, y, \vec{p}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f_1(x, y, \vec{p}) = 0 \\ f_2(x, y, \vec{p}) = 0 \end{cases}$$

Аттракторы могут быть обычными точками в фазовом пространстве, а могут иметь более сложную топологию, являясь, к примеру, замкнутыми кривыми (т.н. предельными циклами). На основе анализа асимптотического поведения динамической системы при приближении к аттракторам, можно построить классификацию аттракторов.

Помимо особых точек существуют аттракторы - предельные циклы, а также очень необычные странные аттракторы:



Предельный цикл.

$$t := 0, 0.1 \dots 30$$

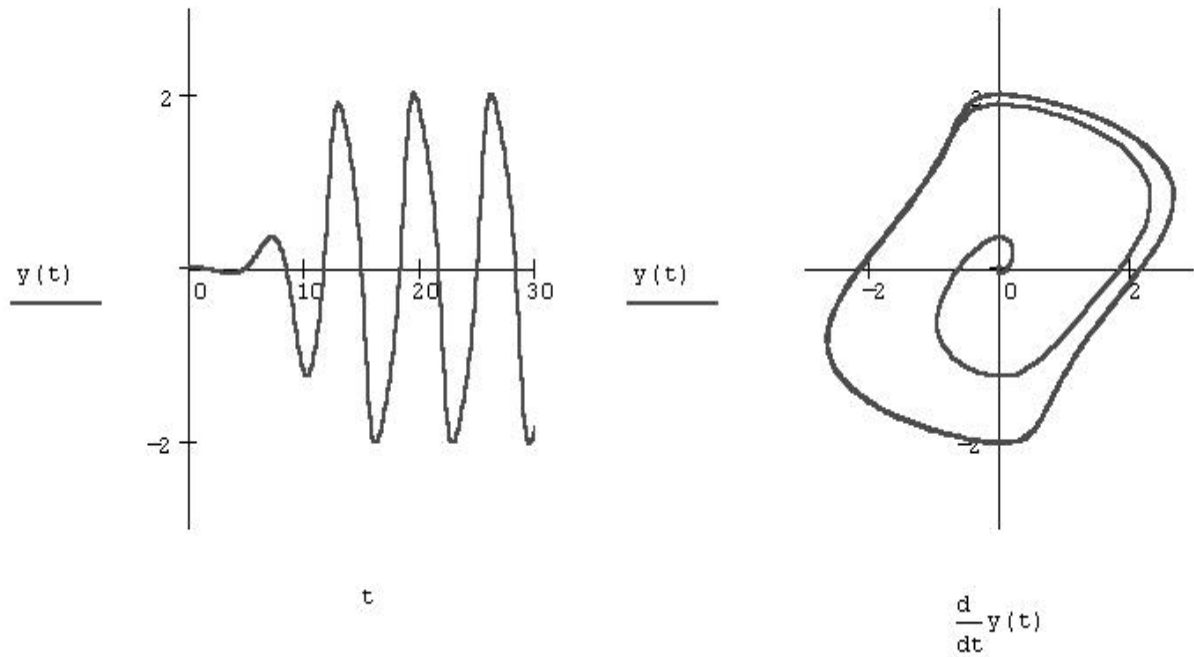
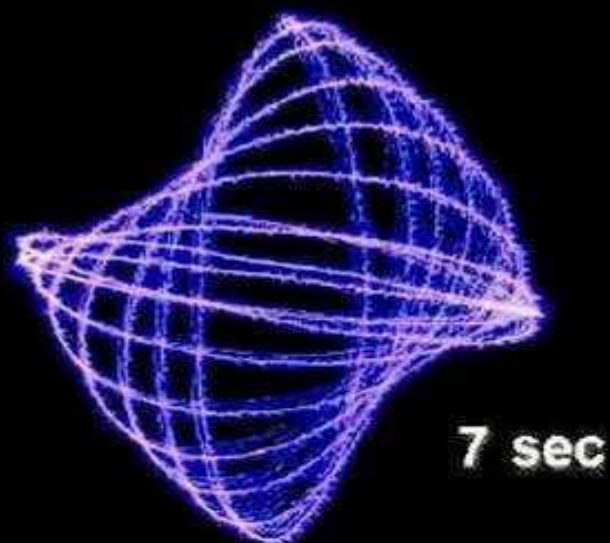


График решения (слева) и фазовый портрет (справа) уравнения Ван-дер-Поля

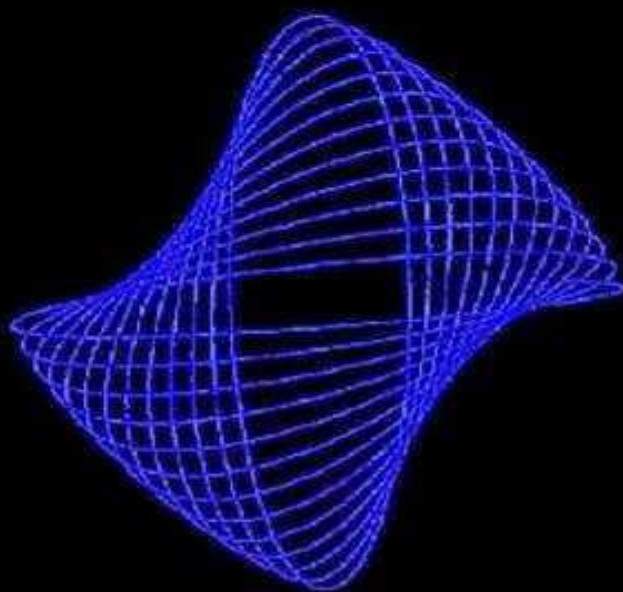
Решением уравнения Ван-дер-Поля являются колебания, вид которых для $\mu=1$ показан на выше. Они называются автоколебаниями и принципиально отличаются от колебаний, рассмотренных нами ранее (например, колебаний маятника в модели осциллятора) тем, что их характеристики (амплитуда, частота, спектр) не зависят от начальных условий, а определяются исключительно свойствами самой динамической системы. Через некоторое время расчетов после выхода из начальной точки решение выходит на один и тот же цикл колебаний, называемый предельным циклом. Аттрактор предельного цикла является замкнутой кривой на фазовой плоскости. К нему асимптотически притягиваются все окрестные траектории, выходящие из различных начальных точек, как изнутри, так и снаружи предельного цикла.

При состояниях системы, характеризуемых странным аттрактором, становится невозможным определить положение частиц в каждый данный момент, хотя они находятся в зоне аттрактора.

Фазовый портрет странного аттрактора — это не точка и не предельный цикл, как это имело место для устойчивых, равновесных систем, а некоторая область, по которой происходят случайные блуждания. С алгоритмами странного аттрактора связаны попытки описание изменений в климате, погодных процессов, движения небесных тел, поведения многих элементарных частиц, явлений тепловой конвекции и т.д.

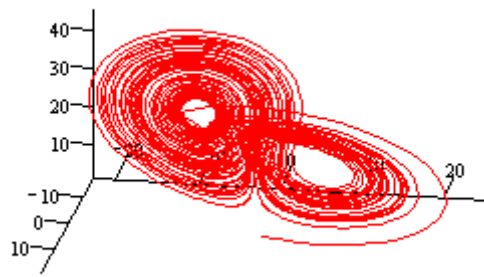


**Фото 1. Экспериментальный
годограф качера. Выдержка 7 сек.**

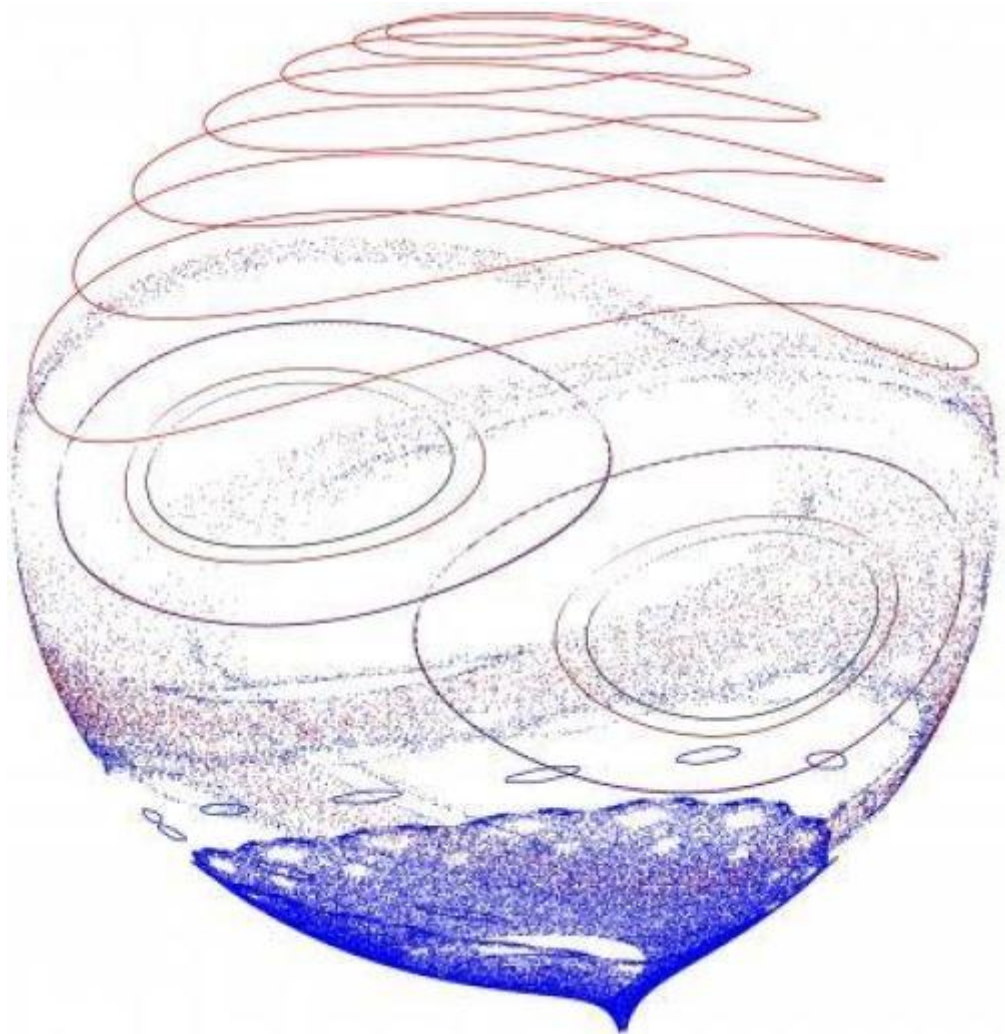


**Рис.1 Математическая модель
годографа качера.**

Годограф качера совпадает с фазовым портретом уравнения Ван дер Поля.



Странный аттрактор.

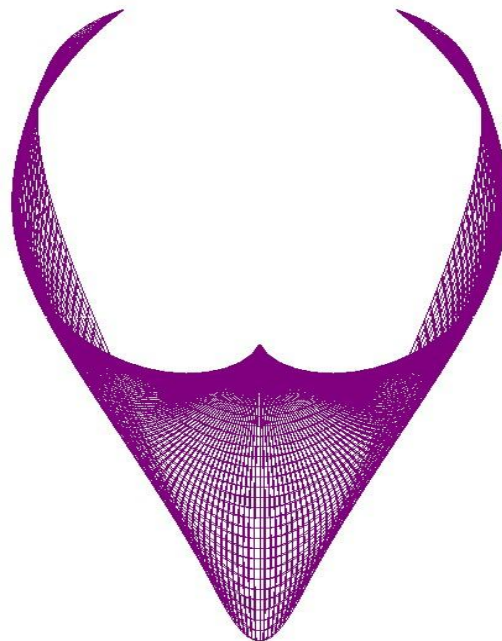


So-called Poincaré sections were used to diagnose chaos in the body-flow interaction study of Johan Roenby of the Technical Univeristy of Denmark and Hassan Aref of Virginia Tech. The regular curves correspond to motions with minimal chaos. The fuzzy regions indicate that the chaotic regime has been entered.

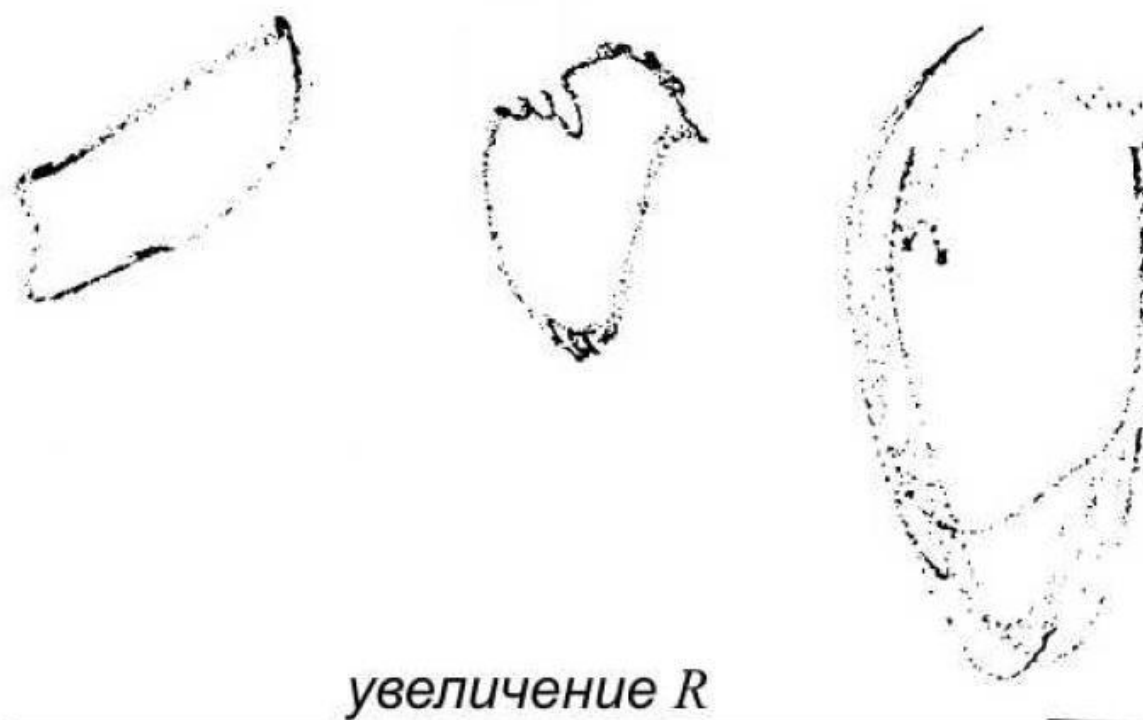
Credit: Johan Roenb



Рис. VI. 25. Сечение Пуанкаре аттрактора в хаотическом режиме конвекции Рэлея — Бенара. Величина ΔT приблизительно пропорциональна вертикальному градиенту температуры в данной точке слоя жидкости. Сечение Пуанкаре было получено стробоскопированием сигналов с частотой одного из двух осцилляторов тепловой конвекции.
Из работы М. Дюбуа.



Волновые уравнения в полной мере описывают и аттрактор Пуанкаре ($\frac{1}{2} \pi$).

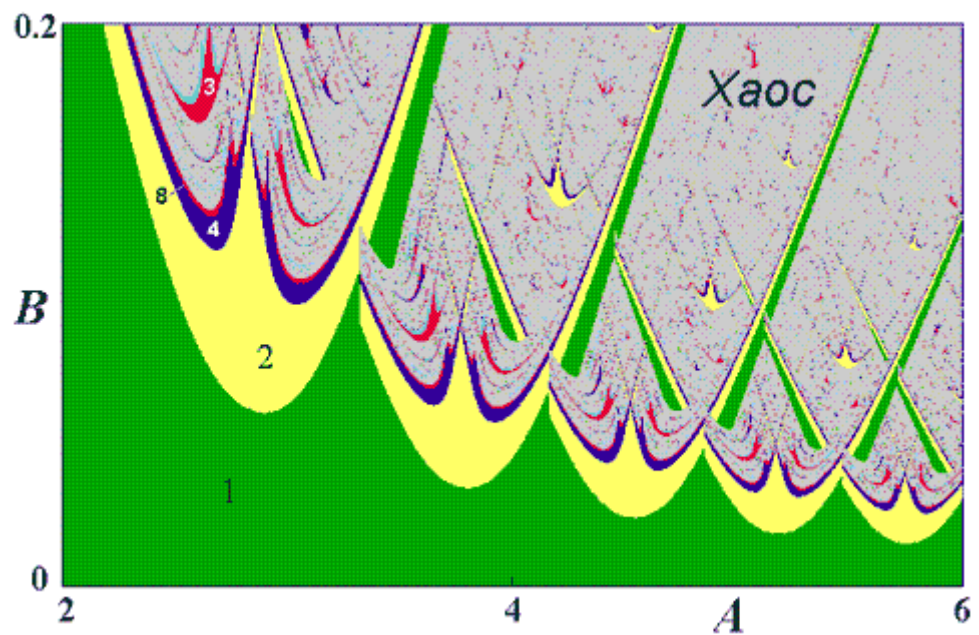


Изменение вида сечений Пуанкаре при переходе к хаосу в экспериментах Бенара

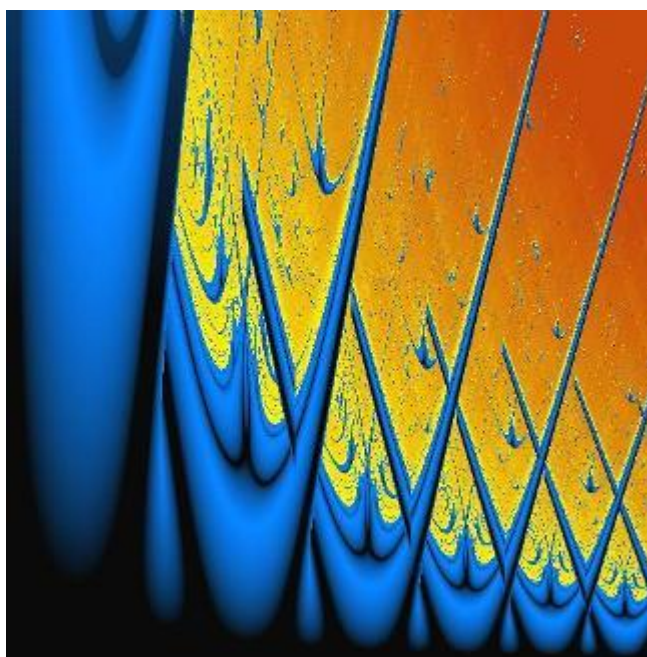
Поведение систем, зависящих от более чем двух нелинейных параметров оказывается сложным. Для анализа таких нелинейных систем существует компьютерный метод, который основан на численном определении типа режима. Результат представляется на плоскости параметров, на которой каждая точка окрашена в соответствующий цвет.

Например, режим периода 1 - зеленым, периода 2 – желтым, периода 4 – синим и т.д., а серым цветом – области хаоса. Такой анализ выявляет некоторые типичные структуры, а также области тонкой и сложного устройства плоскости параметров. Для исследователя он является своего рода географической картой, дающий представление о типах режимов при путешествии по разным маршрутам.

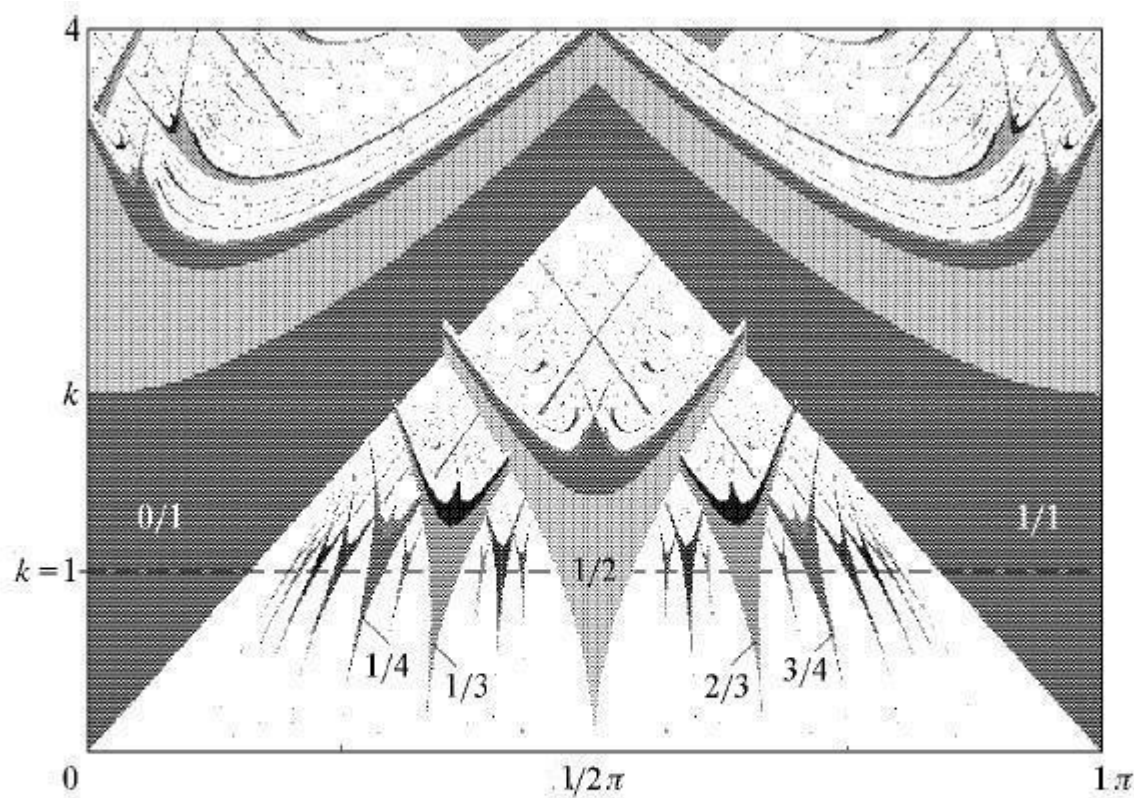
На рисунке показана карта режимов для отображения Икеды, которое описывает динамику возбуждаемого внешними импульсами нелинейного осциллятора.



Ляпуновский показатель характеризует поведение двух изначально очень близких точек в фазовом пространстве. С течением времени расстояние между ними меняется экспоненциальным образом, как раз с величиной показателя. Поэтому если он отрицателен, то точки сближаются, и мы имеем периодический режим

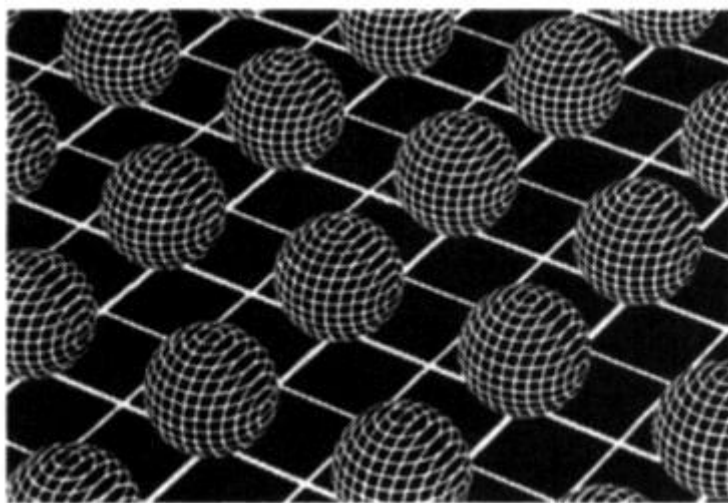


Если же показатель положителен, то точки расходятся. Таким образом, **ляпуновский показатель** является мерой присущей системе чувствительной зависимости от начальных условий и **может тестировать хаос**.



Карта динамических режимов на плоскости параметров отображения окружности $\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta + k \sin \theta \pmod{2\pi}$. Области, изображенные разными тонами серого цвета, отвечают периодическим режимам (языки Арно). Для нескольких языков цифрами указано число вращения. Области квазипериодичности и хаоса показаны белым; $k = 1$ — критическая линия

Рассмотрим браны. Брана (от мембрана) в теории струн (М-теории) — гипотетический фундаментальный многомерный физический объект размерности, меньшей, чем размерность пространства, в котором он находится



б)

Модель свёрнутых дополнительных пространств (бран).

В ТЕОРИИ СТРУН одномерные струны образуют двумерную поверхность при движении во времени. В М-теории двумерные мембраны при движении во времени образуют некоторое тело. Добавляя эти размерности к восьми измерениям системы октонионов, получаем десяти-и одиннадцатимерные пространства.



Если в каждый конкретный момент времени струна представляет собой одномерный объект, то при движении в пространстве-времени соответственно получается двумерная поверхность. Эта эволюция во времени меняет размерности пространства, в котором действует суперсимметрия, на две единицы - одну из-за размерности струны и одну из-за времени. Таким образом, вместо суперсимметрии в пространстве с размерностями один, два, четыре и восемь мы получаем суперсимметрию в пространствах с размерностью три, четыре, шесть или десять.

Считалось, что только десятиразмерная модель самосогласованна. Тем не менее, в рамках этой теории существует и так называемая аномалия, из-за которой различные доказательства одного утверждения дают различные результаты. Теория струн работает только в пространстве размерности десять.

Десятимерная теория струн - версия теории, которая использует октонионы. Таким образом, если теория струн верна, то октонионы - не бесполезная выдумка. Более того, октонионы дают повод говорить о причине, по которой наша Вселенная должна иметь размерность десять. При такой размерности частицы материи и частицы-переносчики взаимодействия описываются при помощи одной числовой системы - кватернионов.

Кроме того в теории вместо струн рассматриваются мембраны. В каждый момент времени мембрана представляет собой двумерную поверхность, а при движении в пространстве-времени - некоторое тело. Если в теории струн к заветным числам 1, 2, 4 и 8 необходимо было добавлять 2, то теперь, соответственно, 3. Таким образом, работая с мембранами, мы получим суперсимметрию в случае размерностей четыре, пять, семь и 11.

И снова удивительным совпадением оказывается тот факт, что разработанная М-теория (М от membrane) использует 11 измерений, что позволяет использовать октонионы. Следует отметить, что М-теория недостаточно разработана, т.к. не выписаны базовые уравнения.

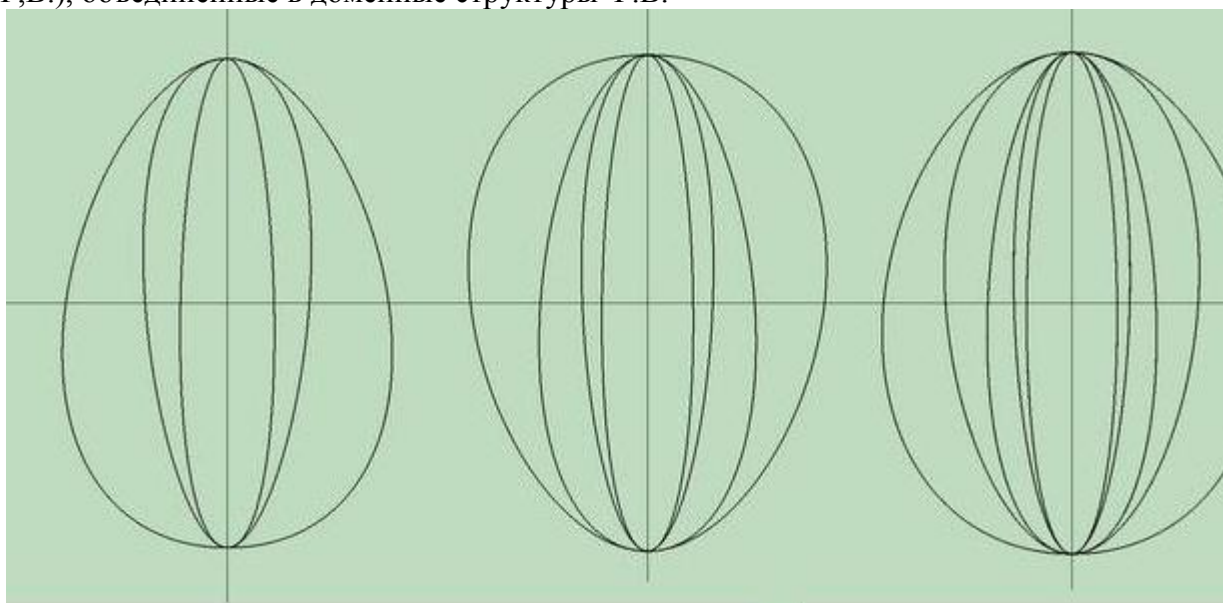
Теория струн и М-теория сегодня в академической физике экспериментального подтверждения не имеет. Окружающий мир не производит впечатления десятимерного или одиннадцатимерного, мы не наблюдаем суперсимметрии между частицами материи и частицами - переносчиками взаимодействия.

Дэвид Гросс (David Gross), один из виднейших в мире специалистов по теории струн, говорит лишь о 50% вероятности экспериментального подтверждения теории суперсимметрии на большом адронном коллайдере. <http://www.modcos.com/articles.php?id=167>

Выводы.

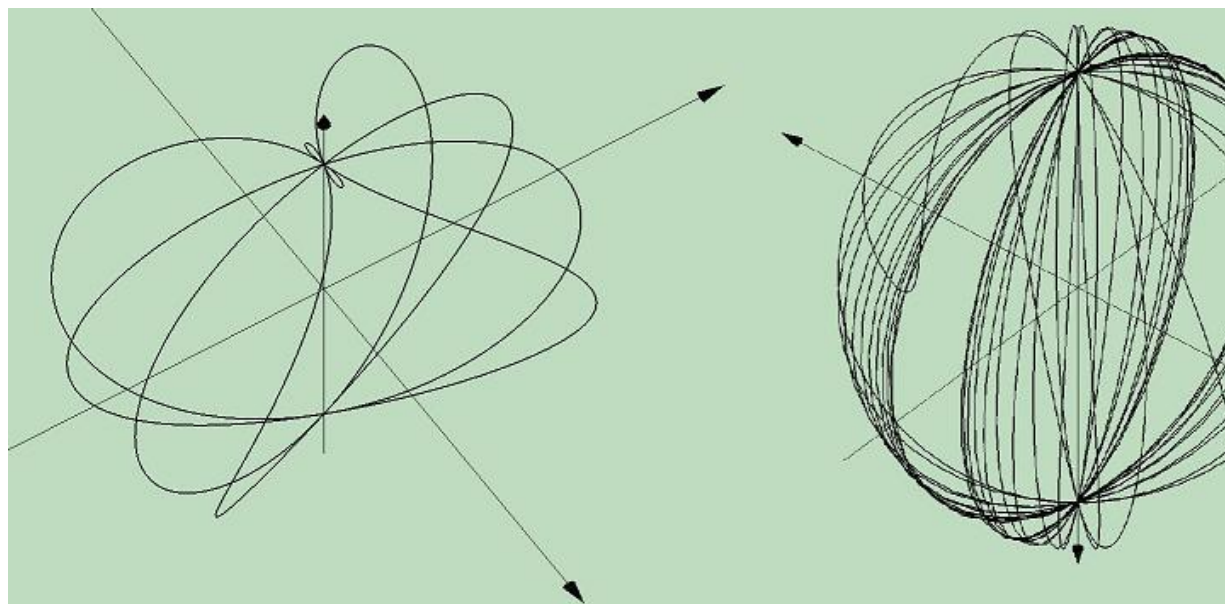
Если ВОЛНОВАЯ М-теория суперструн верна, то:

1. Мир намного сложнее, чем мы это себе представляем.
2. В каждой точке нашего пространства существуют поверхности из свёрнутых клубков бран N-пространств – амёры физического вакуума (Ф,В.), объединённые в доменные структуры Ф.В.



Моделирование роста бран (в сечении).

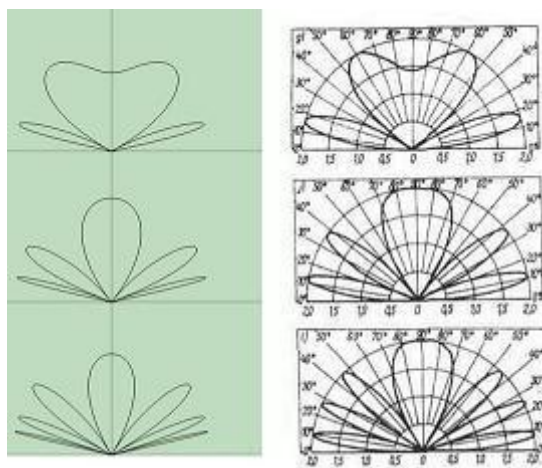
3. М-пространства могут иметь самые различные формы, они допускают разрывы, проколы, слияния и соединения. Благодаря этим соединениям можно не проходить весь путь по ткани М-пространства, а срезать этот путь и пройти как по мосту (N-переход). Пространства могут выворачиваться и приобретать другую форму (флоп-перестройка).



Флоп-перестройка бран N-пространств.

4. Каждое тело, находящееся в нашей (или иной) мерности, одновременно находится и в свернутых пространствах.

Мы постоянно движемся по этим пространствам, проходим сквозь них, не замечая. В этих пространствах не действуют наши привычные представления о пространстве и времени (или почти не действуют), т.к. по принципу фрактальности отдельные проявления физики бран хорошо известны.



Мат. модель браны в различных фазах объясняет последовательное изменение диаграммы направленности полуволнового вибратора.

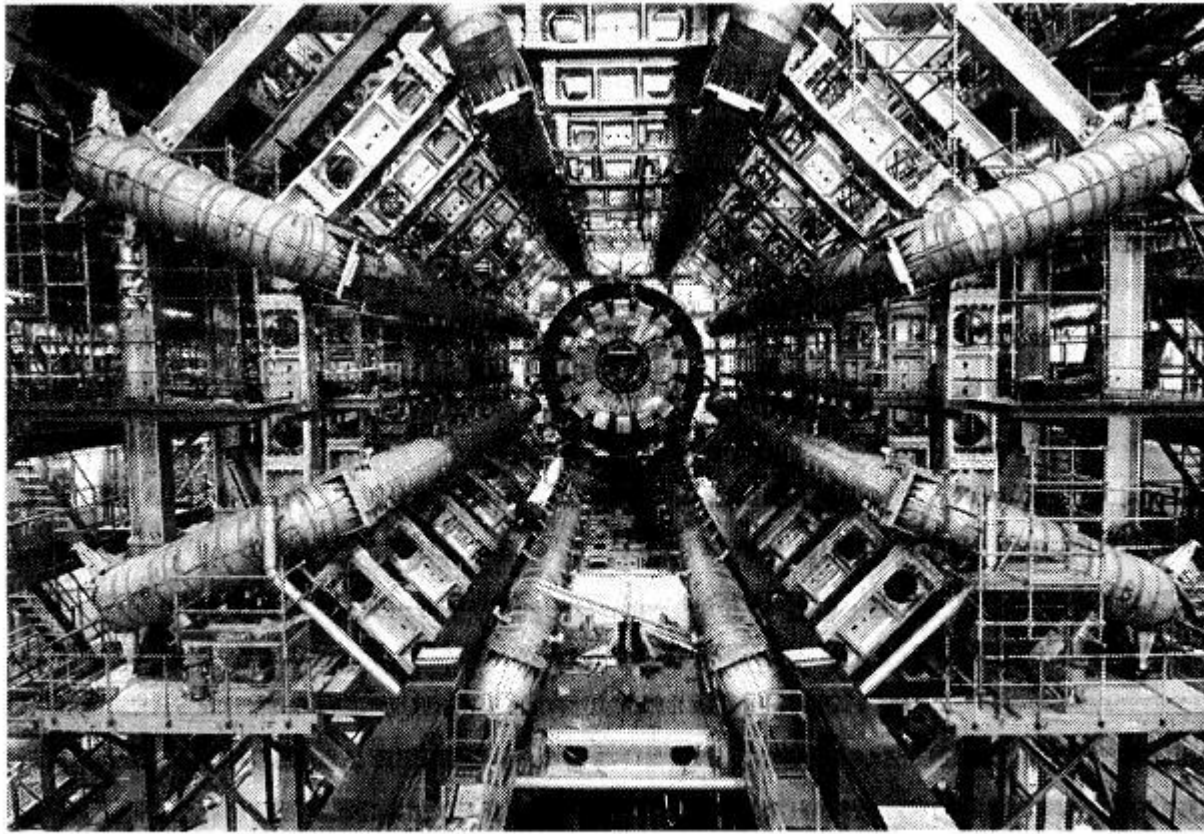
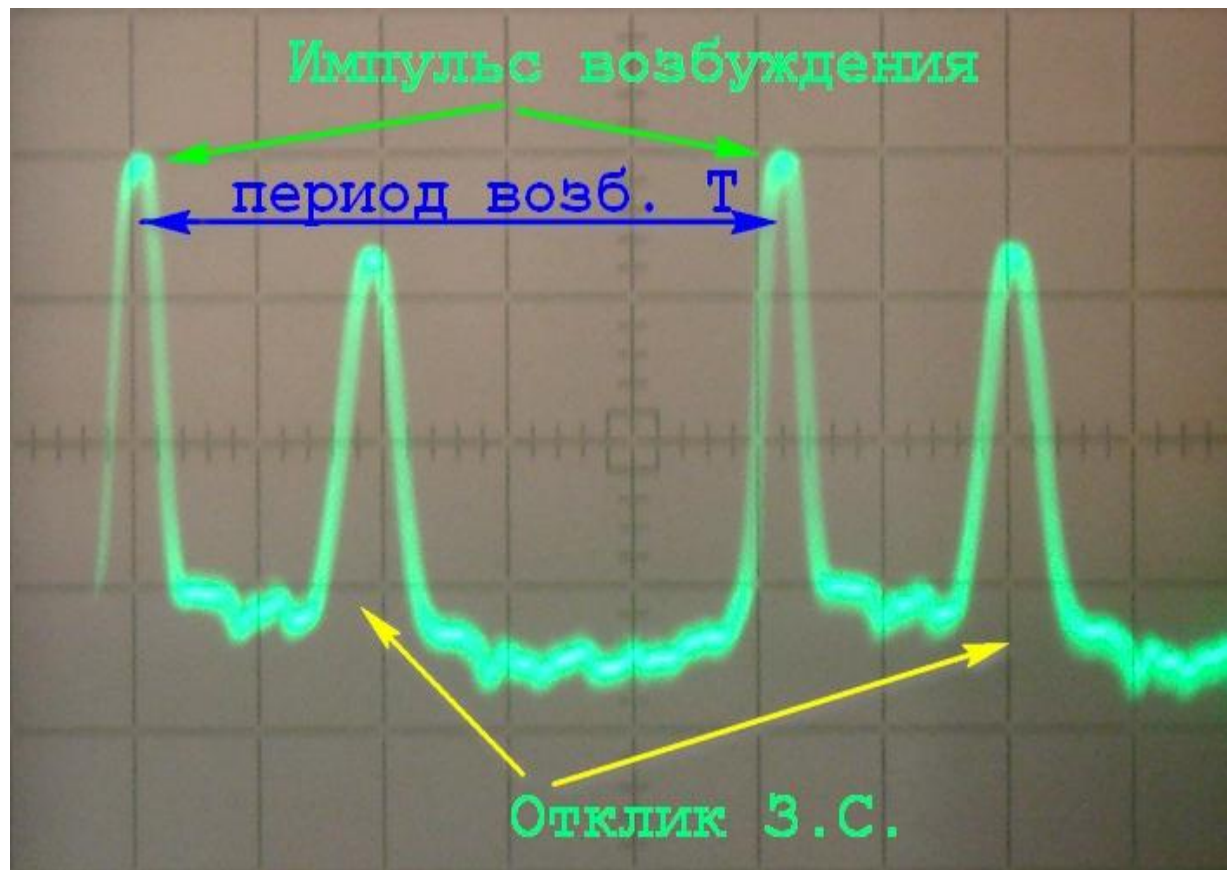


Рис. 12.2. Эксперименты на Большом адронном коллайдере в лаборатории ЦЕРН не могут обнаружить признаки дополнительных измерений или существования симметричных частиц.

Аттрактор Лоренца, аттрактор Пуанкаре, языки Арнольда, гладкое решение уравнения Навье—Стокса, диаграммы направленности - всё это описывается одним волновым уравнением, определяющем общие законы упорядочения многоуровневого многомерного хаоса вселенной в различных его проявлениях.



Для практической проверки теории N-мерности и в связи с отсутствием подручного андронного коллайдера был создан L-генератор с внешним возбуждением, работающий в режиме золотого сечения. Малейшее изменение периода следования импульсов возбуждения **T** приводит к пропаданию отклика З.С. Работа генератора основана на принципе распрямления струны второго порядка с упором на соседние мерности. Таким образом впервые произведено практическое зондирование (простукивание) соседних бран мерностей.

Огромное количество свернутых пространств объединено в одно целое, и составляет одно большое свернутое пространство, охватывающее всю Вселенную.

Добро пожаловать в физическую N-мерную реальность !